Devoir sur Table 2

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Exercice 1

(*D'après Maths C, Banque PT 2020*)

Préambule

1. Soit n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I. Énoncer le théorème donnant la formule de Taylor-Young, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, au voisinage de a.
2. Rappeler le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de zéro, de la fonction cosinus, en faisant le lien avec la formule de Taylor-Young.

Partie I

On considère la fonction ϕ qui, à tout réel x, associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2} \ ; \qquad \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$$

1. Étudier la parité de la fonction ϕ. Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude, et pour sa courbe représentative ?
2. Comparer, pour tout réel x, $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
3. Calculer, pour tout réel x : $\phi'(x)$ (On utilisera les résultats des questions précédentes pour faire le calcul le plus simplement possible).
4. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ (on fera figurer les limites de ϕ aux bornes du domaine d'étude).
5. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \text{ et } 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54.$$

Tracer, sur un même graphique, sur la feuille de papier millimétré fournie, avec l'échelle : 3 cm pour une unité, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?
Donner, à l'aide des question précédentes, une interprétation.

Partie II

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x :

$$h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$$

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$
3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$
4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :
$$h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x).$$
5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$
6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}.$$
7. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

Exercice 2

(*D'après Maths C, Banque PT 2021*)

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx.$$

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

1. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction g est paire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, I_n et J_n sont des intégrales convergentes.
3. Donner, pour tout entier naturel pair n, une relation entre I_n et J_n. Que vaut J_n si l'entier n est impair ?
4. Calculer I_1.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
6. Soit k un entier naturel. Montrer que :
$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
et exprimer, en fonction de k : I_{2k+1}.

Exercice 3
(*D'après Maths C, Banque PT 2018*)

Préambule

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a, b]$:
$$|f'(t)| \leqslant M.$$
2. Que vaut : $\lim\limits_{k \to +\infty, k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} \int_a^b f'(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \mathrm{d}t$?
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\lim_{k \to +\infty, k \in \mathbb{N}} \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \mathrm{d}t = 0.$$

Partie I

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t} \mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} \mathrm{d}t.$$

1. (a) i. Déterminer :
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}.$$
   ii. Déterminer :
$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}.$$
   iii. Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.
   (b) Que vaut I_1 ?
   (c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :
$$\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)$$
   en fonction de $\cos((2n+1)t)$ et $\sin t$.
   (d) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).
2. Étudier la convergence des intégrales J_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.
3. Montrer que la fonction ϕ qui, à tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, associe
$$\phi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$
   est prolongeable en une fonction $\widetilde{\phi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Que vaut : $\lim\limits_{n \to +\infty} \{J_n - I_n\}$? On pensera à utiliser le préambule.
5.
   (a) Montrer que l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est convergente (on pourra effectuer une intégration par parties).
   (b) Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$
   (on pourra utiliser un changement de variable).

(c) Que vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \quad ?$$

Exercice 4

(D'après Maths A, Banque PT 2015)

Partie I

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. (a) Calculer $f(e_1)$, $f^2(e_1)$.
   (b) Montrer que la famille $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est liée.
2. Montrer que même que la famille $\big(e_2, f(e_2), f^2(e_2)\big)$ est liée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
5. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Partie II

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} & x_0 = x \\ \forall n \geqslant 0 & x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

et on note $E_x = \mathrm{Vect}(x_n, n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que E_x est stable par f.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.
3. Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ soit une famille libre.
   (a) Justifier l'existence d'un tel entier p.
   (b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que
   $$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i.$$
   (c) On note $E'_x = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.
   (d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathcal{B}_p = (x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x.
4. On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x. Donner la matrice de $\hat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
5. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}, \hat{f}, \hat{f}^2, \ldots, \hat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.
6. (a) Montrer que pour tout $k < p$,
   $$\hat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1}\hat{f}^{p-1}(x_k).$$
   (b) En déduire que l'on a
   $$\hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - \cdots - a_0\,\mathrm{Id} = 0.$$

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Préambule

1. Théorème de Taylor-Young : Soit n est un entier naturel non nul, f une fonction de classe C^n sur I, intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, si $a \in I$, alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o\left((x-a)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + o_a\left((x-a)^n\right)}$$

2. La fonction cosinus qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = \mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young au rang 2 au voisinage de $a = 0$, alors

$$\boxed{cos(x) \underset{x\to 0}{=} \cos(0) + (-\sin(0))x + \frac{(-\cos(0)}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}$$

Partie I

1. On a clairement, pour $x \in \mathbb{R}$,$\phi(-x) = \phi(x)$, donc $\boxed{\text{la fonction } \phi \text{ est paire.}}$

   Ainsi $\boxed{\text{il suffira d'étudier la fonction } \phi \text{ sur } [0, +\infty[}$, et dans un repère orthonormé, $\boxed{\text{sa courbe représentative sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1 - \frac{6x^2}{12 + x^2} = \frac{12 + x^2 - 6x^2}{12 + x^2} = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2}$$

   C'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \psi(x)}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi'(x) = \psi'(x) = -\frac{12x(12 + x^2) - 6x^2(2x)}{(12 + x^2)^2} = \frac{-144x}{(12 + x^2)^2}$$

   Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi'(x) = \frac{-144x}{(12 + x^2)^2}}$$

4. Pour $x \geqslant 0$, on a $\phi'(x) \leqslant 0$. ϕ est donc décroissante sur $[0, +\infty[$.
   De plus ϕ est paire, ϕ est donc croissante sur $]-\infty, 0]$.

   Au voisinage de $+\infty$ on a $\phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-5x^2}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -5$, ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = -5$ et donc, par parité, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$.

   On a donc le tableau de variation suivant :

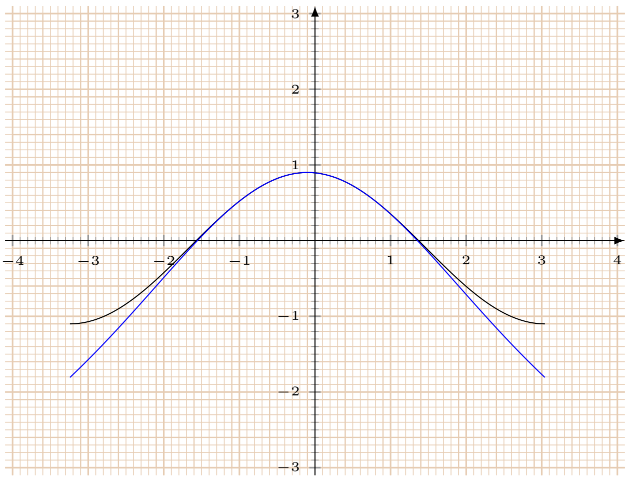
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\phi(x)$	-5	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

5. Remarquons que les deux valeurs approchées données sont là pour nous aider dans notre tracé. L'utilité de la valeur approchée de $\phi(\pi)$ est évidente, détaillons à quoi nous sert la valeur approchée de $2\sqrt{\frac{3}{5}}$
Il est naturel, pour effectuer le tracé, de se demander quelles valeurs annulent la fonction ϕ. Or

$$\begin{aligned} \phi(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 12 - 5x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{12}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2\sqrt{\frac{3}{5}} \text{ ou } x = -2\sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

On obtient donc la figure suivante :

Figure .1 – Tracé de cos (en noir) et ϕ (en bleu)



On remarque que les deux courbes sont très proches au voisinage de 0. Si on regarde les premiers termes du développement limité de la fonction ϕ on a :

— $\phi(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + -\dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$
— $\cos(x) \underset{x0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + -\dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

$\boxed{\text{Les deux fonctions ont le même développement limité à l'ordre 4}}$.

Partie II

1. C'est une question de cours :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)}$$

2. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ »}$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.
<u>Initialisation :</u>
D'après la formule de duplication rappelée à la question 1., pour tout réel x on a $\sin(\pi x) = 2sin(\frac{\pi x}{2})cos(\frac{\pi x}{2})$
La propriété $\mathcal{P}_1$ est bien vérifiée.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sin(\pi x) &= 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= 2^n 2 \sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après la formule de duplication} \\
&= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)}$$

3. Soit h une solution du problème, h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $h(0) = 1$, et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$.
On va là encore procéder par récurrence. Notons $\mathcal{Q}_n$ la propriété

$$\mathcal{Q}_n : \qquad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \text{ »}$$

<u>Initialisation :</u> Soit $x \in \mathbb{R}$, en appliquant la relation vérifiée par h à $\dfrac{x}{2}$ on obtient $h(x) = h(\dfrac{x}{2})\cos(\dfrac{\pi x}{2})$.
La propriété $\mathcal{Q}_1$ est donc vérifiée.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{Q}_n$ vraie.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
h(x) &= h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \textit{d'après l'hypothèse sur } h \textit{ appliquée à } \frac{x}{2^n} \\
&= h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question 3., on a

$$h(x) \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)$$

En utilisant à présent la question 2., on en déduit que

$$\boxed{h(x) \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin(\pi x)}$$

5. La fonction h est continue en 0 et $h(0) = 1$, on a donc $\lim\limits_{u \to 0} h(u) = 1$.

Si x est un réel fixé non nul, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$, donc, par composition de limites, on a $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} h\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = 1}$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi x}{2^n} = 0$, ainsi, à partir d'un certain rang : $\dfrac{\pi x}{2^n} \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a bien $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2^n}\right)$ non nul.
Pour n assez grand on a
$$\frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)} = \frac{1}{\pi}\frac{\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$$
Puisque $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$, on peut donc affirmer que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)} = \frac{1}{\pi}}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et n un entier suffisamment grand pour que $\sin\left(\dfrac{\pi x}{2^n}\right) \neq 0$.
D'après la question 4., on a
$$h(x) = \frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)} h\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin(\pi x)}{x}$$
On passe alors à la limite dans le terme de droite lorsque n tend vers l'infini (à gauche $h(x)$ est une constante), et en exploitant les résultats des questions 5. et 6., on obtient $h(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x}$.
Finalement il ne reste plus qu'à utiliser l'hypothèse $h(0) = 1$ pour conclure
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

Remarque

Ce n'était pas demandé (et donc pas attendu le jour du concours) mais on peut être tenté de vérifier que réciproquement, la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{sin(\pi x)}{\pi x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$ est bien une solution du problème posé. Ceci est vrai car cette fonction est bien continue en 0 grâce à la limite classique rappelée précédemment, et pour tout réel x, $\dfrac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\cos(\pi x)$, donc $h(2x) = h(x)\cos(\pi x)$ si x est non nul, et si $x = 0$ cette égalité est vraie aussi car $1 = 1 \times \cos(0)$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit g une fonction paire définie et continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ convergent.
Or, la fonction $t \mapsto -t$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$ strictement décroissante donc, par changement de variable, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{-\infty} -g(-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}}$

Classique

Il s'agit d'une question très classique à savoir refaire.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente I_n et J_n ont même nature.
La fonction $\varphi : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, il n'y a donc de problème qu'au voisinage de $+\infty$. De plus, pour $x \geqslant 1$ on a
$$x^2|\varphi(x)| \leqslant x^{n+2}\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Ainsi $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;
Or, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$ (par critère de Riemann) donc, par théorème de comparaison, φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Puisque φ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{L'intégrale } I_n \text{ converge}}$ et, donc, d'après la question précédente, $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge.}}$

3. En reprenant le changement de variable de la question 1., on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 x^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x + \int_{+\infty}^0 (-x)^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \big(1+(-1)^n\big) \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \big(1+(-1)^n\big) I_n.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{J_n = 2I_n \text{ si } n \text{ pair et } J_n = 0 \text{ si } n \text{ impair}}$.

4. Soit $A > 0$, on a

$$\int_0^A x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

ainsi $\boxed{I_1 = \frac{1}{2}.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissance comparée, uv tend vers 0 en $+\infty$.

Alors, d'après la formule d'intégration par partie pour les intégrales généralisées, $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = -I_{n+2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes puisque I_{n+2} converge et on a l'égalité :

$$\begin{aligned}
-I_{n+2} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1}\left(-x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) - u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} (n+1)x^n \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{n+1}{2} I_n
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n}$$

6. Soit k un entier naturel. On a $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} > 0$, d'après la relation de la question précédente, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite strictement positive.

Alors, par produits télescopiques, on a

$$\begin{aligned}
\frac{I_{2k}}{I_0} &= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{I_{2(i+1)}}{I_{2i}} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+1}{2} \\
&= \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} (2i+1) \\
&= \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(2i+1) \times 2i}{2i}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{k-1}}\frac{(2k-1)!}{(k-1)!}$$
$$= \frac{(2k)!}{2^k \times 2^k k!}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} I_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

La relation de la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = nI_{2n-1}$ donc, par une récurrence facile

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_{2k+1} = k! I_1 = \frac{k!}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 3

Préambule

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a, b]$, sa dérivée f' est continue sur ce segment. D'après le théorème des bornes atteintes, f' est donc bornée sur $[a, b]$.

   $\boxed{\text{Il existe donc } M \in \mathbb{R}_+ \text{ telle que, pour tout } t \in [a,b],\ |f'()| \leqslant M.}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

   $$\left|f'(t)\mathrm{e}^{ikt}\right| = |f'(M)| \leqslant M$$

   D'où, par inégalité triangulaire pour les intégrales

   $$0 \leqslant \left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b \left|f'(t)\mathrm{e}^{ikt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)M}{k}$$

   Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{M\,(b-a)}{k} = 0$,, d'où

   $$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Intégrale

Notons que l'on travaille ici avec l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, il s'agit donc d'une intégrale convergente.

3. Les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto g(t) = \mathrm{e}^{ikt}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, le théorème d'intégration par parties permet d'écrire :

   $$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

   c'est-à-dire

   $$ik\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{ikb}f(b) - \mathrm{e}^{ika}f(a) - \int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$$

   ou encore, pour k entier naturel non nul :

   $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{ikb}f(b) - \mathrm{e}^{ika}f(a)}{ik} - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t$$

   Et donc, par inégalité triangulaire

   $$0 \leqslant \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(b)|}{k} + \frac{|f(a)|}{k} + \frac{1}{k}\left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t\right|$$

   En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient bien

   $$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Classique

Ce résultat, connu sous le nom de Lemme de Riemannn-Lebesgue est assez classique, il est bon de l'avoir déjà vu et de savoir le reprouver.

Partie I

1. (a) i. On a, par équivalents usuels,

$$\frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{2nt}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 2n$$

Ainsi $\boxed{\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} = 2n.}$

ii. On a : $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \sin(2nt) = \sin(n\pi) = 0$ et $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty$, d'où $\boxed{\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} = 0.}$

iii. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(2nt)}{\tan(t)}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions continue dont le dénominateur ne s'annule pas.
D'après les questions précédentes, elle se prolonge par continuité en 0 et $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale I_n est donc faussement impropre. Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$

(b) Pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\frac{\sin(2t)}{\tan(t)} = \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}} = 2\cos^2(t) = 1 + \cos(2t) =$$

Ainsi

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t)\ \mathrm{d}t = \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}.}$

(c) On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sin((2n+2)t) - \sin(2nt) &= \sin((2n+1)t + t) - \sin((2n+1)t - t)\\ &= \sin((2n+1)t)\cos(t) + \cos((2n+1)t)\sin(t) - (\sin((2n+1)t)\cos(t) - \cos((2n+1)t)\sin(t))\\ &= 2\cos((2n+1)t)\sin(t)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sin((2n+2)t) - \sin(2nt) = 2\cos((2n+1)t)\sin(t).}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+2)t) - \sin(2nt)}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos((2n+1)t)\sin(t)}{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+1)t)\cos(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, de manière similaire à la question 1.(c), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 2\cos((2n+1)t)\cos t = \cos((2n+2)t) + \cos(2nt)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+2)t) + \cos(2nt)\ \mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2(n+1)} + \frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien constante.
Or $I_1 = \frac{\pi}{2}$, ainsi $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \text{ est constante égale à } \frac{\pi}{2}.}$

2. soit $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(pt)}{t}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en tant quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus $\dfrac{\sin(pt)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} p$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(pt)}{t}$ se prolonge donc par continuité en 0 avec la valeur p.
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(pt)}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre donc convergente .
C'est en particulier vrai pour $p = 2n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p = 1$. Donc
$\boxed{\text{Les intégrales } (J_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ sont bien convergentes.}}$

3. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que différence de fonction de classe $\mathcal{C}^1$
On a $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \phi(t) = \frac{2}{\pi}$, ainsi ϕ se prolonge par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ avec la valeur $\dfrac{2}{\pi}$.
Pour $t \neq 0$ on a
$$\phi(t) = \frac{\tan(t) - t}{t\tan(t)} \underset{t\to 0}{=} \frac{t + \frac{t^3}{3} - t}{t\tan(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\frac{t^3}{3}}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{3}$$
Ainsi $\displaystyle\lim_{t\to 0} \phi(t) = 0$, ϕ se prolonge donc en une fonction $\widetilde{\phi}$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
$\widetilde{\phi}$ est de plus C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a
$$\widetilde{\phi}'(t) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1 + \tan^2(t)}{\tan^2(t)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(t)} - \frac{1}{t^2}$$
On a alors $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}'(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$. Ainsi d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\widetilde{\phi}'$ est continue en $\dfrac{\pi}{2}$ et $\widetilde{\phi}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}$.
De plus, pour $t \neq 0$
$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}'(t) &= 1 + \frac{1}{\tan^2(t)} - \frac{1}{t^2}\\ &= 1 + \frac{t^2 - \tan^2(t)}{t^2\tan^2(t)}\\ &\underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{t^2 - \left(t + \frac{t^3}{3} + o(t^4)\right)^2}{t^2\tan^2(t)}\\ &\underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{t^2 - \left(t^2 + \frac{2t^4}{3} + o(t^4)\right)}{t^2\tan^2(t)}\\ &\underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{2}{3}\frac{t^4 + o(t^4)}{t^2\tan^2(t)}\end{aligned}$$
Or $\dfrac{2}{3}\dfrac{t^4 + o(t^4)}{t^2\tan^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2}{3}\dfrac{t^4}{t^4} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2}{3}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{2}{3}\frac{t^4 + o(t^4)}{t^2\tan^2(t)} = \frac{2}{3}$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \widetilde{\phi}'(t) = \frac{1}{3}$

> **Attention**
> On ne somme pas les équivalents, il n'était donc pas possible d'écrire que $1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{t^4 + o(t^4)}{t^2\tan^2(t)} \underset{t\to 0}{\sim} 1 - \dfrac{2}{3}$

D'où, d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\widetilde{\phi}'$ est continue en 0 et $\widetilde{\phi}'(0) = \dfrac{1}{3}$.
Finalement $\boxed{\text{le prolongement } \widetilde{\phi} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{sur } [0, \pi/2].}$

4. Puisque $\widetilde{\phi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0, \pi/2]$, alors d'après le résultat de la question 3. du préambule, la suite de terme général
$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

converge vers 0, par conséquent, la suite extraite $(\alpha_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers 0.
Par continuité de la fonction $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, on en déduit que la suite $(\mathrm{Im}(\alpha_{2n}))$ converge vers $\mathrm{Im}(0) = 0$.
Or, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Im}(\alpha_{2n}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Im}\left(\widetilde{\phi}(t)\,\mathrm{e}^{int}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\phi}(t)\sin(2nt)\,\mathrm{d}t = J_n - I_n$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n - I_n) = 0.}$

Continuité

Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ on a $|\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')| \leqslant |z - z'|$. La fonction $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ est donc 1-Lipschtizienne et, par conséquent, continue.
On aurait ici aussi pu utiliser le théorème des gendarmes puisque $0 \leqslant \mathrm{Im}(\alpha_{2n}) \leqslant |\alpha_{2n}|$.

5. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ étant continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.
Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties pour les intégrales généralisées, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
C'est-à-dire $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature.
Or, pour $t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ on a $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge par critère de Riemann .
Ainsi, par critère de majoration, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.
On en déduit finalement que $\boxed{\text{l'intégrale impropre } \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

(b) On va poser le changement de variable $u = 2nt$, la fonction $\varphi : t \mapsto 2nt$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$. Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\varphi'(t) = 2n$
Le théorème de changement de variables nous assure alors que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ ont même nature et sont égales en cas de convergence.
On a montré à la question 2. que $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, ainsi $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}$$

(c) D'après la question 1.(d), on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} J_n - I_n = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$ et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 4

Partie I

1. (a) $f(e_1)$ a pour coordonnées dans la base canonique la première colonne de A, d'où $\boxed{f(e_1) = (-7, 9, 7, -4).}$

On a $A\begin{pmatrix}-7\\9\\7\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\-90\\-70\\40\end{pmatrix}$, ainsi $\boxed{f^2(e_1) = (-30, -90, -70, 40)}$.

(b) Notons $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rang}(e_1, f(e_1), f^2(e_1)) &= \operatorname{Rang}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(e_1, f(e_1), f^2(e_1))) \\
&= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & -7 & -30\\0 & 9 & -90\\0 & 7 & -70\\0 & -4 & 40\end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & -7 & 3\\0 & 9 & 9\\0 & 7 & 7\\0 & -4 & -4\end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftarrow -\frac{1}{10}C_3 \\
&= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & -7 & 10\\0 & 9 & 0\\0 & 7 & 0\\0 & -4 & 0\end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\
&= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & -7 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 7 & 0\\0 & -4 & 0\end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{Rang}(e_1, f(e_1), f^2(e_1)) < 3$, $\boxed{\text{la famille } (e_1, f(e_1), f^2(e_1)) \text{ est donc liée.}}$

2. Par le calcul on obtient $f(e_2) = (-16, -3, -4, -7)$ et $f^2(e_2) = (160, -70, 40, 70)$.
On peut procéder de la même manière que précédemment ou bien remarquer que $f^2(e_2) = -10\,(f(e_2) + 10e_2)$. Dans les deux cas on constate que $\boxed{\text{la famille } (e_2, f(e_2), f^2(e_2)) \text{ est liée.}}$

3. Pour montrer que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$, on montre que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est inversible, cette matrice est inversible si et seulement si son rang est égal à 4.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rang}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))\right) &= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & -7 & 0 & -16\\0 & 9 & 1 & -3\\0 & 7 & 0 & -4\\0 & -4 & 0 & -7\end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \\0 & 9 & 1 & -3\\0 & 7 & 0 & -4\\0 & -4 & 0 & -7\end{pmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow C_2 + 7C_1,\ C_4 \leftarrow C_4 + 16C_1 \\
&= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 7 & 0 & -4\\0 & -4 & 0 & -7\end{pmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - 9C_3,\ C_4 \leftarrow C_4 + 3C_2 \\
&= \operatorname{Rang}\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 7 & -4\\0 & 0 & -4 & -7\end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftrightarrow C_2
\end{aligned}$$

$$= \text{Rang}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&7&0\\0&0&-4&\dfrac{-33}{7}\end{pmatrix}\right) \qquad C_4 \leftrightarrow C_4+\frac{4}{7}C_3$$
$$= 4$$

Ainsi $\boxed{(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)) \text{ forme une base de } \mathbb{R}^4.}$

4. D'après les questions 2. et 3. on a $f^2(e_1)+10f(e_1)+100e_1 = 0$ et $f^2(e_2)+10f(e_2)+100e_2 = 0$.
   En composant ces égalités par f, on obtient : $f^2(f(e_1)) + 10f(f(e_1)) + 100f(e_1) = f(0) = 0$ et $f^2(f(e_2)) + 10f(f(e_2)) + 100f(e_2) = f(0) = 0$.
   L'égalité $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$ est ainsi vraie pour $x = e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)$.
   soit $x \in \mathbb{R}^4$ quelconque, $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ étant une base de $\mathbb{R}^4$, il existe $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, tel que $x = x_1e_1 + x_2f(e_1) + x_3e_2 + x_4f(e_2)$.
   On a alors, par linéarité de f et f^2,

$$\begin{aligned} f^2(x) + 10f(x) + 100x &= x_1(f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1) + x_2(f^2(f(e_1)) + 10f(f(e_1)) + 100f(e_1)) \\ &\quad + x_3(f^2(e_2) + 10f(e_2) + 100e_2) + x_4(f^2(f(e_2)) + 10f(f(e_2)) + 100f(e_2)) \\ &= x_1 0_{\mathbb{R}^4} + x_2 f(0_{\mathbb{R}^4}) + x_3 0_{\mathbb{R}^4} + x_4 f(0_{\mathbb{R}^4}) \\ &= 0_{\mathbb{R}^4} \end{aligned}$$

   D'où
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^4, \qquad f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0}$$

5. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est
$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}0&-100&0&0\\1&-10&0&0\\0&0&0&-100\\0&0&1&-10\end{pmatrix}}$$

Partie II

1. Soit $y \in E_x$. Il existe I, sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$, tels que $y = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.
   On a alors $f(y) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i x_{i+1} \in E_x$.
   Ainsi, $\boxed{E_x \text{ est stable par } f.}$
2. D'après le cours, tout espace vectoriel contenant tous les vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_n\ ,\ n \in \mathbb{N})$. Il nous suffit donc de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,$x_n \in F$.
   On procède par récurrence.
   <u>Initialisation :</u>
   On a $x_0 = x \in F$ par hypothèse.
   <u>Hérédité :</u>
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $x_n \in F$. F est supposé stable par f donc $f(x_n) \in F$. ainsi $x_{n+1} = f(x_n) \in F$. On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,$x_n \in F$.
   Finalement, $\boxed{E_x \subset F.}$
3. (a) $\mathbb{R}^d$ est de dimension d, donc toute famille de $\mathbb{R}^d$ ayant un nombre de vecteurs strictement supérieur à d est liée.
   Ainsi $\{k \in \mathbb{N}, (x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, majorée par d. Elle contient 1, car $x_0 \neq 0$.
   $\boxed{\text{Elle est donc non vide, finie et admet un plus grand élément, que l'on notera } p.}$
   (b) Par définition de p, la famille $(x_0, x_1, .., x_p)$ est liée. Donc il existe $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ tels que :
$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{p-1}x_{p-1} + \lambda_p x_p = 0$$

Si par l'absurde, $\lambda_p = 0$, alors $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{p-1} x_{p-1} = 0$, or la famille $(x_0, x_1, \cdots, x_{p-1})$ est libre, donc tous les λ_i sont nuls ce qui n'est pas le cas par hypothèse.
Ainsi $\lambda_p \neq 0$ et donc

$$x_p = -\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_p} x_k$$

Si on pose $a_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_p}$, alors $\boxed{\text{il existe bien des réels } a_0, a_1, ..., a_{p-1} \text{ tels que } x_p = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_k.}$

(c) Soit $y \in E'_x$, il existe donc $(\lambda_0, .., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que $y = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k x_k$.

Alors

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k x_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{k-1} x_k + \lambda_{p-1} x_p \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_{k-1} x_k + \lambda_{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (\lambda_{k-1} + \lambda_{p-1} a_k)\, x_k \end{aligned}$$

Ainsi $f(y) \in E'_x$, $\boxed{E_x \text{ est donc stable par } f.}$

(d) Par construction, $E'_x \subset E_x$.
De plus, $x \in E'_x$ et E'_x est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ stable par f, donc par la question 2., $E_x \subset E'_x$.
Finalement $\boxed{E_x = E'_x}$.
$(x_0, ..., x_{p-1})$ est une famille libre et par définition, elle est génératrice de E'_x. C'est donc une base de E'_x.
Puisque $E_x = E'_x$, on en déduit que $\boxed{\mathcal{B}_p = (x_0, ..., x_{p-1}) \text{ est une base de } E_x.}$

4. On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x. $\hat{f}$ est une application linéaire de E_x vers E_x, c'est bien un endomorphisme de E_x.
La matrice de $\hat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}}$$

5. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\lambda_0 Id + \lambda_1 \hat{f} + \lambda_2 \hat{f}^2 + ... + \lambda_{p-1} \hat{f}^{p-1} = 0_{\mathcal{L}(E_x)}$.
Appliquons cette égalité à x, qui est un élément de E_x.
On obtient $\lambda_0 x + \lambda_1 \hat{f}(x) + \lambda_2 \hat{f}^2 + ... + \lambda_{p-1} \hat{f}^{p-1}(x) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_{p-1} x_{p-1} = 0$.
Or $(x_0, ..., x_{p-1})$ est une famille libre, donc $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{p-1} = 0$,
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (Id, \hat{f}, \hat{f}^2, ..., \hat{f}^{p-1}) \text{ est une famille libre de } \mathcal{L}(E_x).}$

6. (a) La relation demandée est vraie pour $k = 0$ car, d'après la définition des réels $a_0, ..., a_{p-1}$, on a

$$\hat{f}^p(x_0) = x_p = a_0 x_0 + ... + a_{p-1}x_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i(x_0)$$

Ensuite, pour $k \in \{0, ..., p-1\}$ (ou même pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque), on applique $\hat{f}^k$ aux deux membres de cette égalité,
On a $\hat{f}^k(x_p) = x_{p+k} = \hat{f}^p(x_k)$ et

$$\hat{f}^k\left(\sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i\left(\hat{f}^k(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i(x_k)$$

On obtient donc bien la relation demandée.
Ainsi

$$\boxed{\forall k < p, \qquad \hat{f}^p(x_k) \sum_{i=0}^{p-1} a_i \hat{f}^i(x_k)}$$

(b) Notons g l'endomorphisme de E_x défini par $g = \hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - ... - a_0 \,\mathrm{Id}$.
D'après la question précédente, on a $g(x_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, donc g est nul sur tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}_p$ de E_x, et par conséquent g est l'endomorphisme nul sur E_x.
On a donc bien $\boxed{\hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - ... - a_0 \,\mathrm{Id} = 0}$.